**บทที่ 2**

**ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง**

**2.1 หุ้น**

2.1.1 หุ้น

หุ้น (Common Stock) [15] คือ หลักทรัพย์ที่แสดงความเป็นเจ้าของส่วนหนึ่งในบริษัทราคาหุ้นจะเปลี่ยนแปลงตามผลประกอบการของบริษัทและภาวะตลาด

เมื่อผู้ที่มีเงินหรือนักลงทุน [16] ต้องการสร้างผลกำไรจากเงินที่มีอยู่ และไม่ต้องการเปิดกิจการเองเนื่องจากไม่ต้องการรับภาระปัญหาต่างๆ เช่น การบริหารงาน ดูแลพนักงาน เป็นต้น ทางเลือกการลงทุนที่เป็นที่นิยมคือการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ ซึ่งเป็นสถานที่บริษัท (มหาชน) นำหุ้นเข้าสู่ตลาด มีนักบริหารมืออาชีพให้มาปฏิบัติหน้าที่แทนผู้ถือหุ้นหรือผู้ลงทุนให้เกิดผลกำไรจากการลงทุน

*1) ตลาดการเงิน (Financial Market) [16]*

ตลาดการเงินแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1.1 ตลาดเงิน (Money Market) เป็นแหล่งรวบรวมเงินทุนในระยะสั้น (ไม่เกิน 1 ปี) เช่น ตั๋วแลกเงิน, ตั๋วสัญญาใช้เงิน, ตั๋วเงินคลัง เป็นต้น

1.2 ตลาดทุน (Capital Market/ Stock Market) เป็นแหล่งรวบรวมเงินทุนระยะยาว (มากกว่า 1 ปีขึ้นไป) เป็นตลาดสำหรับหน่วยงานที่ต้องการเงินลงทุนไปใช้ในวัตถุประสงค์ต่างๆ ในระยะยาว เช่น การขยายธุรกิจของเอกชน หรือการลงทุนของรัฐบาลในด้านสาธารณูปโภค ซึ่งตลาดทุนแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ 1) แบ่งตามลักษณะการหาทุน ได้แก่ ตลาดตราสารทุน เช่น หุ้นสามัญ หุ้นบุริมสิทธิ์ ใบสำคัญแสดงสิทธิ หุ้นกู้แปลงสภาพ และตลาดตราสารหนี้ 2) แบ่งตามลักษณะการซื้อขายหลักทรัพย์ ได้แก่ ตลาดแรก เป็นตลาดซื้อขายตลาดหลักทรัพย์ออกใหม่ และตลาดรอง เป็นตลาดที่ซื้อขายหลักทรัพย์ที่เคยถูกทำการซื้อขายมาแล้วในตลาดแรก

*2) ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (The Stock Exchange of Thailand)* [17]

มีชื่อย่อว่า SET เดิมชื่อตลาดหุ้นกรุงเทพ (Bangkok Stock Exchange) ก่อตั้งเมื่อเดือนกรกฎาคม พุทธศักราช 2505 แต่ประสบความสำเร็จไม่มากนักเพราะประชาชนในสมัยนั้นยังขาดความรู้ความเข้าใจในการลงทุน ไม่ได้รับความสนใจมากนักจากนักลงทุน และขาดการสนับสนุนจากทางรัฐบาล ต่อมาได้มีการพัฒนาตลาดทุนบรรจุลงแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติและประกาศใช้ในพระราชบัญญัติ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยเปิดทำการซื้อขายอย่างเป็นทางการครั้งแรกในวันที่ 30 เมษายน พุทธศักราช 2518 และได้เปลี่ยนชื่อภาษาอังกฤษจาก The Securities Exchange of Thailand มาเป็น The Stock Exchange of Thailand ในวันที่ 1 มกราคม พุทธศักราช 2534

ตลาดหลักทรัพย์ทำหน้าที่เป็นศูนย์กลางการซื้อขายหลักทรัพย์จดทะเบียน อำนวยการและพัฒนาระบบต่างๆ ให้เอื้ออำนวยในการซื้อขายหลักทรัพย์ รวมทั้งดำเนินธุรกิจต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการซื้อขายหลักทรัพย์ เช่น เป็นสำนักหักบัญชี (Clearing House) ศูนย์รับฝากหลักทรัพย์ นายทะเบียนหลักทรัพย์ เป็นต้น

*1.3 ดัชนีราคาหลักทรัพย์ (Stock Price Index) [16]*

ดัชนีราคาเป็นเครื่องมือที่ผู้ลงทุนใช้ติดตามภาพรวมความเคลื่อนไหวของระดับราคาซื้อขายหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์ ดัชนีราคาหุ้นที่เป็นที่นิยมคือดัชนีราคาหุ้นชนิดถ่วงน้ำหนักด้วยมูลค่าตลาด (Market Capitalization Weighted Index) คำนวณโดยเปรียบเทียบมูลค่าหลักทรัพย์รวมของตลาดในวันปัจจุบัน (Current Market Value) กับมูลค่าหลักทรัพย์รวมของตลาดในวันฐาน (Base Market Value) มีค่าดัชนีหุ้นในวันฐานเท่ากับ 100 และสูตรการคำนวณดังสมการที่ 1

Current Market Value x100

Base Market Value

Stock Price Index = (1)

1. *ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET INDEX)*

เป็นดัชนีราคาหุ้นจากการคำนวณหุ้นสามัญจดทะเบียนทุกหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์ไทยรวมทั้งกองทุนรวมและอสังหาริมทรัพย์ โดยใช้วันที่ 30 เมษายน พุทธศักราช 2518 เป็นวันฐาน ดัชนีนี้จะสะท้อนให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของระดับราคาโดยเฉลี่ยของหุ้นสามัญทั้งหมดในตลาดหลักทรัพย์ไทย ณ วันปัจจุบัน โดยที่การเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้นสามัญที่มีมูลค่าตลาดสูงจะมีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงต่อ SET Index มากกว่าการเปลี่ยนแปลงของหุ้นสามัญที่มีมูลค่าตลาดต่ำ

*ดัชนีเซท 50 (SET 50 INDEX)*

เป็นดัชนีที่แสดงความเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ 50 อันดับแรกที่มีมูลค่าทางตลาดสูงและการซื้อขายมีสภาพคล่องอย่างสม่ำเสมอ ใช้วันที่ 16 สิงหาคม พุทธศักราช 2538 เป็นวันฐาน ซึ่งตลาดหลักทรัพย์จะพิจารณาคัดเลือกหุ้นสามัญเพื่อคำนวณ SET 50 Index ทุกๆ 6 เดือน

1. *ดัชนีกลุ่มอุตสาหกรรม (Industry Group Index)/ ดัชนีหมวดธุรกิจ (Social Index)* [16]

ดัชนีทั้งสองกลุ่มนี้เป็นดัชนีราคาหุ้นที่สะท้อนการเคลื่อนไหวราคาของหลักทรัพย์ที่มีลักษณะพื้นฐานคล้ายกันจัดอยู่ในอุตสาหกรรมหมวดเดียวกัน มีหลักการคำนวณคล้ายๆ SET Index ใช้หุ้นสามัญจดทะเบียนทุกหลักทรัพย์ในแต่ละกลุ่มอุตสาหกรรม ในการคำนวณและมีการปรับฐานการคำนวณดัชนีทุกครั้งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนหุ้นจดทะเบียน หรือเมื่อมีหลักทรัพย์ย้ายกลุ่มอุตสาหกรรม

*ดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ (Dow Jones Industrial Average: DJIA) [18]*

ดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ (Dow Jones) ถูกคิดค้นขึ้นโดย ชาร์ลส์ ดาว (Charled Dow) ในปีคริสตศักราช 1896 เป็นดัชนีที่คิดคำนวณจากหุ้นบลูชิพ 30 ตัวที่ซื้อขายในตลาดหลักทรัพย์ New York Stock Exchange ในประเทศสหรัฐอเมริกา (หุ้นบางตัวอยู่ในตลาดหุ้น Nasdaq ด้วย) ซึ่งหุ้นบริษัท 30 บริษัทนี้เป็นอุตสาหกรรมขนาดใหญ่และเป็นที่รู้จักเป็นอย่างดี ดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ เป็นดัชนีราคาตลาด (Price Weight Index) ที่พิจารณาเอาเฉพาะราคาหุ้นของแต่ละบริษัทมาบวกกันแล้วหารด้วยบริษัททั้งหมด เป็นการใช้ราคาเป็นหลักโดยไม่พิจารณาถึงขนาดบริษัทซึ่งแตกต่างจากดัชนีราคาหุ้นที่เป็นดัชนีมูลค่าตลาด (Market Capitalization Weighted Index) ส่งผลให้หากมีจำนวนบริษัทในตลาดหุ้นน้อยเกินไป ค่าดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์จะไม่สามารถสะท้อนความเคลื่อนไหวของราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ได้ ดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ที่จะทำการศึกษานั้นประกอบด้วยบริษัทดังตารางที่ 1

ตารางที่ 2.1 รายชื่อบริษัทที่อยู่ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ (ณ วันที่ 23 กันยายน พ.ศ. 2556)

| **Symbol** | **Company** | **Symbol** | **Company** |
| --- | --- | --- | --- |
| AXP | American Express Company | MCD | McDonald's Corporation |
| BA | Boeing Company | MMM | 3M Company |
| CAT | Caterpillar Inc. | MRK | Merck & Co. Inc. |
| CSCO | Cisco Systems Inc. | MSFT | Microsoft Corporation |
| CVX | Chevron Corporation | NKE | Nike Inc. |
| DD | E.I. du Pont de Nemours & Company | PFE | Pfizer Inc. |
| DIS | Walt Disney Company | PG | The Procter & Gamble Company |
| GE | General Electric Company | T | AT&T Inc. |
| GS | Goldman Sachs Group Inc. | TRV | The Travelers Company Inc. |
| HD | Home Depot Inc. | UNH | UnitedHealth Group Incorporated |
| IBM | International Business Machines | UTX | United Technologies Corporation |
| INTC | Intel Corporation | V | Visa |
| JNJ | Johnson & Johnson | VZ | Verizon Communications Inc. |
| JPM | JP Morgan Chase & Co. | WMT | Wal-Mart Stores Inc. |
| KO | Coca-Cola Company | XOM | Exxon Mobil Corporation |

2.1.2 การวิเคราะห์หุ้น

สำหรับการวิเคราะห์หุ้นการที่จะหากลยุทธ์ที่จะใช้ในการลงทุนแบบไม่มีข้อผิดพลาดคงเป็นไปได้ยาก [19] การพยากรณ์ราคาหุ้นก็เช่นกัน ในการวิเคราะห์จึงจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือและหลักการหลากหลายอย่าง ซึ่งแนวคิดการวิเคราะห์ราคาหุ้นแบ่งออกเป็น 2 วิธี [17] ได้แก่

1) การวิเคราะห์ปัจจัยพื้นฐาน (Fundamental Analysis) [17]

เป็นการวิเคราะห์ที่มองถึงภาพรวมในวงกว้างว่า อุตสาหกรรมใดกำลังอยู่ในช่วงขาขึ้นหรือขาลง รวมไปถึงบริษัทมีผลประกอบอย่างไร ผู้บริหารมีวิสัยทัศน์อย่างไร เป็นการวิเคราะห์ที่เหมาะสำหรับนักลงทุนที่จะลงทุนในหุ้นระยะกลางถึงระยะยาว สามารถวิเคราะห์จากปัจจัยดังต่อไปนี้

*การวิเคราะห์สภาพเศรษฐกิจ (Macro Analysis)*

เป็นการวิเคราะห์สภาพทางเศรษฐกิจทั้งในประเทศและต่างประเทศจากภาวะการเมือง เศรษฐกิจ รวมถึงคาดการณ์สิ่งที่น่าจะเกิดขึ้นในอนาคต ผลกระทบจากอัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยนระหว่างประเทศ อัตราการเจริญเติบโตของผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ (Gross Domestic Product ;GDP) ดัชนีผู้บริโภค (Customer Price Index) การนำเข้าและส่งออก (Import and Export) ฯลฯ

*การวิเคราะห์อุตสาหกรรม (Industry Analysis)*

หลังจากการวิเคราะห์สภาพเศรษฐกิจ ทำให้ทราบถึงแนวโน้มของเศรษฐกิจในอนาคต นักลงทุนจะวิเคราะห์ถึงลักษณะอุตสาหกรรม ซึ่งแต่ละอุตสาหกรรมจะมีลักษณะแตกต่างกันออกไป ไม่ว่าจะเป็นสภาพตลาดและการแข่งขัน นโยบายสนับสนุนของรัฐบาล วงจรธุรกิจของอุตสาหกรรม การวิเคราะห์เหล่านี้จะช่วยนักลงทุนสามารถตัดสินใจลงทุนในหุ้นต่างๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

*การวิเคราะห์บริษัท (Company Analysis)*

เป็นปัจจัยที่ตอบปัญหานักลงทุนได้ว่าทำไมหุ้นกลุ่มเดียวกัน ราคาหุ้นขึ้นลงแตกต่างกัน เพราะแต่ละบริษัทมีองค์ประกอบทางธุรกิจไม่เหมือนกัน การวิเคราะห์บริษัทสามารถวิเคราะห์ได้ทั้งเชิงปริมาณ (Quantitative) คือ การวิเคราะห์งบดุล กำไรขาดทุน กำไรต่อหุ้น ฯลฯ และเชิงคุณภาพ (Qualitative) คือ การวิเคราะห์เทคนิคการผลิต คุณภาพของสินค้าหรือบริการของบริษัท ความพึงพอใจของลูกค้า ประสิทธิภาพการบริหารงาน ฯลฯ

2) การวิเคราะห์ทางเทคนิค (Technical Analysis) [17]

มาจากแนวคิดด้านสถิติที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลราคาหุ้น ปริมาณการซื้อขายหุ้นย้อนหลัง มาคำนวณเป็นค่าทางสถิติ แสดงผลออกมาเป็นกราฟเพื่อพยากรณ์ความเคลื่อนไหวของราคาหุ้น อาศัยข้อมูลในอดีตเพื่อทำนายอนาคตในระยะสั้น

*สมมติฐานการวิเคราะห์หุ้นทางด้านเทคนิค*

* ราคาหุ้นสะท้อนให้เห็นถึงข้อมูลด้านต่างๆ ไว้หมดแล้วไม่ว่าจะเป็นข้อมูล ข่าวสาร เศรษฐกิจ การเมือง อุตสาหกรรม ผลประกอบการของบริษัท โดยแสดงอยู่ในรูปความต้องการซื้อ (Demand) และความต้องการขาย (Supply) ออกมาทางราคาซื้อขายหุ้น
* ราคาหุ้นเคลื่อนไหวอย่างมีแนวโน้มในช่วง ณ เวลาหนึ่ง เมื่อแนวโน้มหุ้นเป็นหุ้นขาขึ้นราคาหุ้นก็จะขึ้น เมื่อแนวโน้มหุ้นเป็นหุ้นขาลงราคาหุ้นก็จะลง
* ประวัติศาสตร์มักเกิดขึ้นซ้ำรอย คือ ราคาหุ้นมักเคลื่อนไหวคล้ายๆ พฤติกรรมในอดีต

*ทฤษฎีดาวโจนส์ (Dow Theory)* [7]

คิดค้นขึ้นโดย ชาร์ลส์ ดาว (Charles H. Dow) บรรณาธิการหนังสือพิมพ์วอลล์ สตรีท เจอร์นัล และผู้ร่วมก่อตั้งบริษัท Dow Jones and Company ได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาแห่งการวิเคราะห์ทางเทคนิค

หลักการพื้นฐานของทฤษฏีดาว 6 ข้อ

1. ตลาดหุ้นมีการเคลื่อนไหวอยู่ 3 แบบ คือ

* *ระยะยาว (Primary Trends)* เป็นระยะที่นานมากกว่า 1 ปี บอกถึงสภาวะตลาดที่ร้อนแรงหรือภาวะตลาดซบเซา
* *ระยะกลาง (Intermediate Trends)* มีระยะเวลา 10 วันถึง 3 เดือน ถือว่าเป็นระยะปรับตัว (Correction) ของตลาดระยะยาว ซึ่งมักจะมีการปรับตัวในลักษณะตรงกันข้ามกล่าวคือ แนวโน้มของราคาหุ้นลดลงเพื่อไปต่อ หรือแนวโน้มของหุ้นเพิ่มขึ้นเมื่อราคาลดลง มีอัตราการเกิดขึ้นในช่วง 33 เปอร์เซ็นถึง 66 เปอร์เซ็นของแนวโน้มราคาหุ้นเดิมก่อนที่ราคาหุ้นจะปรับราคาเข้าสู่แนวโน้มเดิม
* *ระยะสั้น (Minor Trends)* มีระยะเวลาตั้งแต่ 1 ชั่วโมงถึง 1 เดือน เกิดขึ้นช่วงสั้นๆ เป็นช่วงที่สั้นที่สุด ลักษณะเป็นการกวัดแกว่งของราคาหุ้นตามปกติเท่านั้น

1. แนวโน้มตลาดมี 3 ช่วง คือ

* *ช่วงเก็บของ (Accumulation phase)* เป็นช่วงแรกที่นักลงทุนซื้อหุ้นเก็บไว้เมื่อเห็นว่าราคาหุ้นในตลาดได้รับผลกระทบจากข่าวสารแล้ว ซึ่งช่วงนี้ราคาหุ้นจะไม่เปลี่ยนแปลงมาก
* *ช่วงตื่นตูม (Public Participation)* เป็นช่วงที่สองที่นักลงทุนเริ่มมองเห็นแนวโน้มและทิศทางของราคาหุ้นจากการวิเคราะห์สัญญาณทางเทคนิค
* *ช่วงปล่อยของ (Distribution)* เป็นช่วงที่สาม เมื่อมีนักลงทุนซื้อขายหุ้นในตลาดจำนวนมากจะทำให้ราคาหุ้นเพิ่มขึ้นไปตามที่คาดหรืออาจสูงมากกว่าที่คาดการณ์ไว้ ทำให้มีการขายทำกำไร

1. ตลาดหุ้นได้สะท้อนข้อมูลต่างๆ ไว้หมดแล้ว สอดคล้องกับสมมติฐานเรื่องตลาดมีประสิทธิภาพ (Efficient Market Hypothesis)
2. ดัชนีค่าเฉลี่ยของแต่ละอุตสาหกรรมในตลาดหุ้นจะขึ้นลงไปในทิศทางเดียวกัน สนับสนุนกัน
3. ปริมาณซื้อขายจะเป็นตัวรับรองแนวโน้ม คือ หากเป็นตลาดขาขึ้นปริมาณการซื้อขายหุ้นก็ควรจะสูงขึ้นตาม เพราะมีการซื้อจำนวนมาก หากเป็นตลาดขาลง ปริมาณขายก็จะมาก แต่หากปริมาณซื้อขายน้อยแนวโน้มของตลาดจะยังไม่ชัดเจนเพียงพอที่จะยืนยันได้

ตารางที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างราคาหุ้นและปริมาณการซื้อขายหุ้น

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **ปริมาณ**  **ราคา** | **ลดลง** | **เพิ่มขึ้น** |
| **ขึ้น** | แนวโน้มขึ้น  ชะลอตัว | แนวโน้มขึ้น  ต่อเนื่อง |
| **ลง** | แนวโน้มลง  ชะลอตัว | แนวโน้มลง  ต่อเนื่อง |

1. แนวโน้มจะมีเปลี่ยนก็ต่อเมื่อมีสัญญาณบ่งบอกอย่างชัดเจนว่าถึงจุดสิ้นสุดแล้ว

*แนวโน้มของตลาด*

แนวโน้มของตลาดมีการเคลื่อนไหว 3 รูปแบบ คือ

* *แนวโน้มขาขึ้น (Uptrend)* เป็นจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของราคาหุ้นอยู่สูงกว่าจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของวันก่อนหน้า
* *แนวโน้มขาลง (Downtrend)* เป็นจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของราคาหุ้นอยู่ต่ำกว่าจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของวันก่อนหน้า
* *แนวโน้มด้านข้าง (Sideway)* เป็นจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของราคาหุ้นอยู่ใกล้เคียงจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของวันก่อนหน้า

2.2 ทฤษฎีอลวน (Chaos Theory) [3]

ทฤษฎีอลวนหรือทฤษฎีเคออสเป็นทฤษฎีที่อธิบายพฤติกรรมระบบพลวัต (Dynamic System) ซึ่งเป็นระบบที่เปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา เรียกการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นว่า “ระบบเคออส (Chaos System)” ระบบเคออสที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติยกตัวอย่างเช่น ปรากฏการณ์เกี่ยวกับสภาพอากาศ การเคลื่อนที่ของน้ำที่ไหลในก๊อกน้ำ การไหลเวียนของสภาพอากาศ ฯลฯ ทฤษฎีอลวนเกี่ยวกับปรากฏการณ์สภาพอากาศที่เป็นที่รู้จักคือ ปรากฏการณ์ผีเสื้อ (Butterfly Effect) โดยเอ็ดเวิร์ด ลอเรนซ์ (Edward Lorenz) ที่กล่าวว่า “แม้ผีเสื้อตัวเล็กๆ ที่กระพือปีกเบาๆ อยู่ที่ซีกโลกหนึ่งอาจจะส่งผลกระทบต่อระบบสภาพอากาศของอีกซีกโลกหนึ่งก็เป็นได้” หมายความว่า ที่ระบบ ณ จุดเริ่มต้นหากมีเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย ผลลัพธ์หลังจากการเปลี่ยนแปลงอาจแตกต่างกันอย่างมหาศาล

ทฤษฎีอลวนริเริ่มและบุกเบิกโดยนักวิทยาศาสตร์หลายๆ คน ซึ่งเอ็ดเวิร์ด ลอเรนซ์ ได้สังเกตพฤติกรรมของสภาพอากาศ ในปีคริสตศักราช 1961 ขณะที่เขาทำการทดลองพยากรณ์อากาศโดยใช้คอมพิวเตอร์จำลองสภาพอากาศคำนวณข้อมูลจำนวนมากทำให้ใช้เวลานาน เมื่อมีข้อมูลใหม่เพิ่มเติมเข้ามาเขาไม่ต้องการเริ่มคำนวณใหม่จึงใช้ข้อมูลที่คำนวณก่อนหน้าเป็นค่าเริ่มต้นเพื่อประหยัดเวลาการคำนวณ พบว่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้แตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงแม้ว่าค่าที่ใช้ในการคำนวณครั้งก่อนจะมีความแตกต่างกันน้อยมาก และคำว่าเคออส (Chaos) มาจากนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อว่า เจมส์ เอ ยอร์ค (James A.Yorke) ในช่วงปีคริสตศักราช 1900 จากการที่เขาศึกษาการโคจรของวัตถุสามชิ้นในสนามแรงดึงดูดที่เรียกว่า ปัญหาสามวัตถุ (Three-Body Problem) และชูล อองรี ปวงกาเร (Jules Henri Poincare') ชาวฝรั่งเศสค้นพบว่าวงโคจรนั้นอาจไม่ได้โคจรเป็นคาบหรือวงรอบ (Aperiodic) ไม่ซ้ำเป็นวงเดิมและไม่ได้ขยายวงออกไปเรื่อยๆ หรือลู่เข้าสู่ค่าค่าหนึ่ง จากนั้นได้มีการศึกษาสมการปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นโดยนักวิทยาศาสตร์หลายๆ คน เช่น เบอร์คอฟ (G.D. Birkhoff) ศึกษาปัญหา ความปั่นป่วนหรือเทอร์บิวแลนซ์) ปัญหาสามวัตถุคอลโมโกรอฟ (Andrei Nicolanevich Komogorove) และลิตเติลวูด (J.E. Littlewood) ศึกษาปัญหาทางวิศวกรรมการสื่อสารด้วยคลื่นวิทยุและสเมล (StephenSmale)

*2.2.1 หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในทฤษฎีอลวน* [17]

1. กระบวนการทำซ้ำ (Iteration Process)

กระบวนการทำซ้ำในทฤษฎีอลวนสามารถยกตัวอย่างสมการกำลังสองง่ายๆ คือ  เมื่อ  เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง และที่เราคุ้นเคยกันก็คือสมการโลจิสติก กระบวนการทำซ้ำในที่นี้มีความหมายว่ามีการคำนวณสมการซ้ำๆ ในแต่ล่ะครั้ง โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการครั้งก่อนหน้านี้จะถูกใช้เป็นข้อมูลเข้าในการคำนวณสมการครั้งถัดไป เป็นกระบวนการเดียวกันกับการป้อนตัวเลขบนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ที่มีฟังก์ชันคณิตศาสตร์อย่างเช่น sin หรือ cos

สำหรับตัวอย่างการคำนวณสำหรับฟังก์ชัน  ที่มี  เป็นการทำซ้ำรอบที่ 2 ของฟังก์ชัน  สามารถเขียนในอยู่ในรูป  และ  เป็นการทำซ้ำรอบที่ 3 ของ  และเขียนในรูปสมการทั่วไป คือ 

*ตัวอย่าง*

ถ้าการคำนวณครั้งที่ 1 คือ  จะได้

การทำซ้ำครั้งที่ 2 

การทำซ้ำครั้งที่ 3 

ซึ่งสมการในรูปทั่วไป  นี้ ไม่ได้หมายความว่า  ยกกำลังเพิ่มทั้งหมด ครั้ง แต่หมายถึงการคำนวณซ้ำครั้งที่ 

1. วงรอบการคำนวณ (Orbits)

นิยามให้  เป็นวงรอบการคำนวณภายใต้ฟังก์ชัน  โดยมีลำดับเป็น , , , …, , … ซึ่งค่าเริ่มต้น  นี้ เรียกว่า seed ของวงรอบการคำนวณ

*ตัวอย่าง*

ถ้า  และ  จะมีวงรอบการคำนวณเป็นดังนี้



จะเห็นว่าการคำนวณซ้ำเพื่อหาค่าของ  จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ  มีค่ามากขึ้น ดังนั้นวงรอบการคำนวณของ  มีค่าลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ  มีค่ามาก

1. ประเภทของวงรอบการคำนวณ (Types of Orbits)

*จุดตรึง (Fixed Point)*

วงรอบการคำนวณที่สำคัญที่สุดในระบบพลวัต คือ จุดตรึง ซึ่งเป็นจุดที่ไม่เคลื่อนย้ายไปไหนและถูกกำหนดค่าโดยฟังก์ชัน หากจุด  เป็นจุดตรึงจะมีเงื่อนไขว่า  แล้ว  ซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการทั่วไปได้เป็น 

ดังนั้นจุดตรึงคือลำดับของค่าคงที่ , , ,... ที่ไม่มีการเปลี่ยนค่าไม่ว่าจะคำนวณซ้ำๆ คำตอบที่ได้จะไม่เปลี่ยนแปลง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง

 ซึ่งมี 0, 1 เป็นจุดตรึง เมื่อลองแทนค่าจุดตรึงเท่ากับ 1 จะได้



สรุปได้ว่า  เมื่อ 

สามารถหาจุดตรึงได้จากสมการ ดังนี้









หากแก้สมการจะได้ค่าจุดตรึง คือ 

*จุดคาบ (Periodic Orbit or Cycle)*

จุด  เป็นจุดคาบ ถ้า  สำหรับ โดยมีข้อสังเกตว่า  เป็นจุดคาบที่เกิดจากการคำนวณซ้ำๆ ให้คำตอบเป็นชุดจากการคำนวณ  ครั้ง โดยค่าของ  ที่น้อยที่สุดเรียกว่า “คาบฐาน (Prime Period)” ของวงรอบการคำนวณ

ตัวอย่าง

 หากเริ่มคำนวณที่ จะมีการคำนวณเป็นวงรอบดังนี้





ดังนั้นวงรอบของ 0 คือ 0, -1, 0, -1, 0, -1, … ซึ่งค่า 0 และ 1 ที่ปรากฏใน วงรอบนี้แสดงว่ามีค่าคาบฐานเป็น 2 หรือ 2-Cycle

*Eventually Fixed or Eventually Periodic*

จะเรียกจุด ว่า Eventually Fixed หรือ Eventually Periodic หาก ไม่ใช่จุดตรึงหรือจุดคาบ แต่บางจุดเป็นจุดในวงรอบการคำนวณซ้ำ อาจเป็นได้ทั้งจุดตรึงและจุดคาบ



ตัวอย่าง

จากสมการ  หากให้ เป็น Eventually Fixed ทำการคำนวณซ้ำจะได้







โดยจุด  เป็นจุดตรึง

1. การวิเคราะห์เชิงกราฟ (Graphical Analysis)

การวิเคราะห์เชิงกราฟทำให้เข้าใจพฤติกรรมของระบบพลวัตรในการแมปไปยัง 1 มิติ โดยการใช้กราฟของฟังก์ชันต่างๆ วิเคราะห์พฤติกรรมการคำนวณซ้ำของฟังก์ชัน และพฤติกรรมวงรอบแบบคาบกรณีต่างๆ

สมมติว่ามีกราฟของฟังก์ชัน  จะทำการเพิ่มเส้นตรงที่  บนกราฟของฟังก์ชันเพื่อช่วยในการวิเคราะห์กราฟ ดังภาพที่ 2.1















ภาพที่ 2.1 กราฟฟังก์ชัน 

ในภาพแสดงจุดตัดบนกราฟเส้นตรง 2 จุด นั่นคือจุดตรึงของฟังก์ชัน การหาวงรอบต่อไปของ  เริ่มจากลากเส้นตรงจากจุด  บนกราฟเส้นตรงไปตั้งฉากกับกราฟของฟังก์ชัน จะได้จุด  จากนั้นลากเส้นแนวนอนจากจุดนี้ไปยังกราฟเส้นตรง ตัดกันที่จุด  แล้วทำซ้ำในลักษณะเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้จุดต่อๆ ไปของวงรอบเป็น  ซึ่งทำให้ได้กราฟที่มีลักษณะคล้ายขั้นบันไดดังภาพที่ 2.2

   1

ภาพที่ 2.2 วงรอบการคำนวณของฟังก์ชัน  โดยการวิเคราะห์เชิงกราฟ

(1,1)

0 1

ภาพที่ 2.3 การวิเคราะห์เชิงกราฟของฟังก์ชัน 

ฟังก์ชัน  ดังภาพที่ 2.3 มีจุดตรึง คือ จุด 0 และ 1 ซึ่งสังเกตได้ว่าทุกจุด ที่ วงรอบของฟังก์ชันจะลู่เข้าสู่ 0 ขณะที่จุด  ที่  วงรอบของฟังก์ชันจะเข้าสู่ระยะอนันต์ (Infinity)

-2

-2

-2

2

2

2

-2

2

ภาพที่ 2.4ก

ภาพที่ 2.4ข

การวิเคราะห์เชิงกราฟของฟังก์ชัน 

หากจุดคาบของฟังก์ชันคือ  จะได้การวิเคราะห์เชิงกราฟดังภาพที่ 2.4ก ซึ่งมีฟังก์ชันคือ  มีค่าคาบฐานเป็น 2 cycle และวงรอบการคำนวณจะมีแนวโน้มลักษณะดังภาพที่ 2.4ข ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าได้

ในบางครั้งเราไม่สามารถใช้การวิเคราะห์เชิงกราฟดูพฤติกรรมของวงรอบการคำนวณได้ ยกตัวอย่างเช่นสมการยกกำลังสอง เนื่องจากมีความซับซ้อนในวงรอบการคำนวณเป็นตัวอย่างของปรากฏการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้นในทฤษฎีอลวน

1. จุดตรึง

*จุดตรึงแบ่งได้ 3 ประเภท ได้แก่*

1. Attracting Fixed Point คือ จุดตรึง  ที่หากทำการคำนวณซ้ำแล้วค่าที่ได้จะลู่เข้าใกล้จุดตรึงไปเรื่อย ๆ จุดตรึงประเภทนี้เป็นจุดตรึงที่สามารถหาวงรอบการคำนวณได้
2. Repelling Fixed Point คือ จุดตรึง  ที่หากทำการคำนวณซ้ำแล้วค่าที่ได้จะห่างจากจุดตรึงนั้นออกไปเรื่อย ๆ
3. Neutral Fixed Point หมายถึงจุดที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นแบบ Attracting หรือแบบ Repelling

*แคลคูลัสของจุดตรึง (Calculus of Fixed Points)*

พิจารณาสมการเส้นตรง  ; และ  ; ฟังก์ชันทั้ง 2 สมการนี้มีจุดตรึงที่ 0 แต่จุดตรึงของสมการ  เป็นแบบ Attracting และจุดตรึงของสมการ  เป็นแบบ Repelling ดังภาพที่ 2.5

(ก)

(ข)

ภาพที่ 2.5 การวิเคราะห์เชิงกราฟของ

1. , 
2. , 

จากสมการ  หากกำหนดให้  และสมการ  ให้  จะพบว่าประเภทของจุดตรึง ยังคงเป็นแบบ Attracting และจุดตรึงของ  เป็นแบบ Repelling เช่นเดิมดังภาพที่ 2.6

จากการวิเคราะห์เชิงกราฟนี้สามารถสรุปได้ว่าความชันของเส้นตรงสามารถบอกได้ว่าจุดตรึงของฟังก์ชันเป็นแบบ Attracting หรือแบบ Repelling

(ก)

(ข)

ภาพที่ 2.6 การวิเคราะห์เชิงกราฟของ

1. , 
2. , 

*นิยาม*

ให้ เป็นจุดตรึงของฟังก์ชันแบบ Attracting Fixed Point เมื่อ และ ให้ เป็นจุดตรึงของฟังก์ชันแบบ Repelling Fixed Point เมื่อ และจะเรียก เป็นจุดตรึงของฟังก์ชันแบบ Neutral Fixed Point เมื่อ

*ทฤษฎีบท Attracting Fixed Point*

ให้จุดตรึง เป็น Attracting Fixed Point ของฟังก์ชัน แล้วจะมีช่วง  ที่มี  อยู่ในช่วงนี้และมีเงื่อนไขว่า

ถ้า แล้ว สำหรับทุกๆ  และนอกเหนือจากนั้น  ณ ที่ 

*ทฤษฎีบท Repelling Fixed Point*

ให้จุดตรึง เป็น Repelling Fixed Point ของฟังก์ชัน แล้วจะมีช่วง  ที่มี  อยู่ในช่วงนี้และมีเงื่อนไขว่า

ถ้า และ  แล้วมีช่วง  ดังนั้น 

ในการใช้งานเราจะหาจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point โดยการสุ่มค่าตั้งต้นมาคำนวณหาวงรอบในการคำนวณ ถ้าวงรอบการคำนวณนี้เข้าสู่ช่วง  ก็จะสามารถหาจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point ได้

ในกรณีของจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point จะแตกต่างจากแบบ Attracting หรือ Repelling ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน  มีจุดทุกจุดเป็นจุดตรึงแต่จุดตรึงนี้ไม่ใช่ทั้งแบบ Attracting และ Repelling หรือฟังก์ชัน  ที่มีจุดตรึงคือ 0 เพียงจุดเดียวแต่จุดตรึงนี้ไม่ใช่ทั้งแบบ Attracting และ Repelling ซึ่งทั้ง 2 ฟังก์ชันมีคาบเท่ากับ 2 และฟังก์ชัน  มีจุดตรึงที่ 0 เป็น Attracting จากด้านขวาของกราฟแต่เป็น Repelling จากด้านซ้ายของกราฟดังภาพที่ 2.7 จะเห็นได้ว่าทั้ง 3 กรณีมีค่า ซึ่งจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point จะปรากฏเป็น Attracting หรือ Repelling นั้นขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณ

1

-1

1

-1

ภาพที่ 2.7 การวิเคราะห์เชิงกราฟของฟังก์ชัน  มีจุดตรึงที่ 0

1. จุดคาบ

จุดคาบแบ่งได้เป็น 3 ประเภทเช่นเดียวกับจุดตรึง คือ แบบ Attracting, Repelling และ Neutral Fixed Point เริ่มตัวอย่างด้วยฟังก์ชัน  มีคาบฐาน Attracting cycle of period เป็น 2 และมีวงรอบการคำนวณเป็น 0, -1, 0, -1,… มีการวิเคราะห์เชิงกราฟดังภาพที่ 8

อ้างอิงจากภาพที่ 8 เราสามารถใช้การวิเคราะห์เชิงกราฟตรวจสอบฟังก์ชัน ได้ว่า  มีจุดตรึง 4 จุด เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้  และหากแทนค่า 0 และ -1 ลงไปในสมการอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ นั่นหมายความว่าจุดทั้ง 2 จุดนี้เป็นจุดคาบแบบ Attracting Fixed Point ของการทำซ้ำครั้งที่ 2 ของฟังก์ชัน 

-2

1

-2

1

ภาพที่ 2.8 Attracting cycle of period ของ ฟังก์ชัน 

*นิยาม*

จุดคาบ ของการคำนวณซ้ำครั้งที่  เป็นแบบ Attracting หรือ Repelling Fixed Point ถ้าฟังก์ชันที่  ที่  เป็นฟังก์ชันแบบ Attracting หรือ Repelling Fixed Point

นั่นคือหากต้องการทราบว่าจุดคาบ  ในการคำนวณซ้ำครั้งที่  เป็นแบบ Attracting หรือ Repelling Fixed Point จะต้องคำนวณหาฟังก์ชันอนุพันธ์ของ  ที่  โดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ในกฎลูกโซ่ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  และ  ดังสมการที่ 2

 (2)

จะได้ว่า



 (3)

และ



 (4)

สรุปกฎลูกโซ่ในการคำนวณหาจุดคาบได้ว่า ให้ ขึ้นอยู่กับจุดคาบในรอบที่  บนฟังก์ชัน  ที่ แล้ว

 (5)

ตัวอย่าง

ให้  มีจุด 0 อยู่ในวงรอบจุดคาบของรอบที่ 3 โดยที่  และซึ่ง  ดังนั้น   และ  ฉะนั้นแล้ว







เพราะฉะนั้นวงรอบการคำนวณของฟังก์ชันนี้เป็นแบบ Repelling Fixed Point

1. ไบเฟอร์เคชัน (Bifurcation)

7.1 พลวัตรของควอดราติคแมป (Dynamics of the Quadratic Map)

ในการศึกษาจะเริ่มศึกษาจากฟังก์ชันรูปแบบสมการง่าย ๆ เช่น ระบบพลวัตรของฟังก์ชันยกกำลังสอง (Quadratic Function) ซึ่ง  เป็นค่าคงที่ ซึ่งฟังก์ชันนี้จะแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตรที่ทำให้เกิดไบเฟอร์เคชันขึ้น

ฟังก์ชัน  มีค่า  ที่ต่างกัน ส่งผลให้เกิดระบบพลวัตรของ  ที่ต่างกัน การศึกษาจะเริ่มจากการหาจุดตรึงของ  โดยการแก้สมการยกกำลังสอง

 (6)

ได้จุดตรึง 2 จุดคือ

 (7)

 (8)

จะสังเกตเห็นว่าจุด และ  เป็นจำนวนจริงเมื่อ หรือ  ถ้าหาก ฟังก์ชันนี้จะไม่มีจุดตรึง และหาก  แล้ว  ฟังก์ชัน  จะมีจุดตรึงจุดเดียว ซึ่งค่า  ที่ต่ำกว่า  หรือ  นั้นจะพบกับไปเฟอร์เคชันครั้งที่ 1 (First Bifurcation)

หลังจากนั้นจะทำการตรวจสอบว่าจุดเป็นจุดตรึงแบบ Attracting, Repelling หรือ Neutral Fixed Point โดยการหาอนุพันธ์  จะได้

 (9)

 (10)

พิจารณา หาก  จะได้ว่า  เป็นจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point แต่หาก จะได้ว่า แล้วจุด  จะเป็นจุดตรึงแบบ Repelling Fixed Point

ในกรณีจุด จะมีความซับซ้อนมากกว่า หาก  เมื่อ  แต่ถ้า แล้ว  จุดจะเป็นจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point แล้วจะทำการหาค่า โดยการแก้สมการที่ทำให้ ดังนี้







ดังสมการข้างต้นจะได้ว่าจุด  เป็นจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point เมื่อ  และ เป็นจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point เมื่อ  และหาก  แล้ว  จะทำให้ เป็นจุดตรึงแบบ Repelling Fixed Point

สรุปไบเฟอร์เคชันครั้งที่หนึ่ง (The First Bifurcation):สำหรับฟังก์ชัน 

1. วงรอบทั้งหมดจะลู่เข้าสู่ระยะอนันต์ถ้า 
2. เมื่อ  ฟังก์ชัน  มีจุดตรึงจุดเดียวที่  ซึ่งเป็นจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point
3. เมื่อ  ฟังก์ชัน มีจุดตรึง 2 จุด คือ  เป็นจุดตรึงแบบ Repelling Fixed Point และจุด  จำแนกเป็นกรณีได้ดังนี้

ก. หาก , เป็นจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point

ข. หาก , เป็นจุดตรึงแบบ Neutral Fixed Point

ค. หาก , เป็นจุดตรึงแบบ Repelling Fixed Point

พิจารณา เมื่อ  จุด  จะไม่เป็นจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point เนื่องจากวงรอบการคำนวณแบบคาบเป็น 2 สามารถแก้สมการ  ได้รากสมการ 4 ค่า เนื่องจากทราบว่า  เป็นส่วนประกอบของสมการจะทำให้มีตัวประกอบที่เหลือเป็นจุดตรึงของ  คือ

 (11)

จุด  เป็นจำนวนจริงและขึ้นอยู่กับค่า หาก  ในกรณีนี้จะเกิดไบเฟอร์เคชันขึ้น อีกครั้งหนึ่ง เรียกว่า พีเรียด - ดับเบิลลิง ไบเฟอร์เคชัน (Period Doubling Bifurcation) จากนั้นให้ทำการวิเคราะห์เช่นเดิม มีข้อสรุปดังนี้

สรุปไบเฟอร์เคชันครั้งที่สอง (The Second Bifurcation): สำหรับฟังก์ชัน 

1. หาก ,  ที่  มีจุดตรึงแบบ Attracting และไม่มีวงรอบการคำนวณ
2. ถ้า ,  ที่  มีจุดตรึงแบบ Neutral และไม่มีวงรอบการคำนวณ
3. ถ้า  , ที่  มีจุดตรึงแบบ Repelling และมีจุด Attracting แบบ 2 cycle ที่ 

7.2 แซดเดิล-โนด ไบเฟอร์เคชัน (The Saddle-Node Bifurcation)

จะพิจารณาฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันของ  และ  เป็นตัวแปร และสมมติให้ ขึ้นอยู่กับค่า  และ  ตัวอย่างเช่น,  และ

ไบเฟอร์เคชันจะเกิดขึ้นเมื่อจุดตรึงหรือจุดคาบที่มีโครงสร้างเหมือน  มีการเปลี่ยนแปลงผ่านค่าๆ หนึ่ง และไบเฟอร์เคชันสำคัญที่เกิดขึ้น คือ แซดเดิล - โนด หรือ แทนเจนต์ ไบเฟอร์เคชัน (Tangent Bifurcation)

*นิยาม*

ฟังก์ชัน จะเกิดแซดเดิล - โนด หรือ แทนเจนต์ ไบเฟอร์เคชัน ที่  ถ้ามีช่วงเปิด และ แล้วดังนั้น

1. สำหรับจุดที่ จะไม่มีจุดตรึงในช่วง 

2. สำหรับจุดที่ จะมีจุดตรึง 1 จุด เป็นจุดตรึงแบบ Neutral ในช่วง 

3. สำหรับจุดที่ มีจุดตรึง 2 จุด ซึ่งจุดตรึงหนึ่งเป็นแบบ Attracting และอีกจุดเป็นแบบ Repelling ในช่วง 

**(ก)  (ข)  (ค) **

ภาพที่ 2.9 ตัวอย่าง แซดเดิล-โนด ไบเฟอร์เคชัน

7.3 พีเรียด-ดับเบิลลิง ไบเฟอร์เคชัน (The Period – Doubling Bifurcation)

*นิยาม*

ฟังก์ชัน จะเกิดพีเรียด-ดับเบิลลิง ไบเฟอร์เคชัน ที่  ถ้ามีช่วงเปิดที่ และ ฉะนั้น

1. สำหรับแต่ล่ะ  ในช่วง  จะมีจุดตรึง เฉพาะสำหรับฟังก์ชัน ในช่วง 

2. สำหรับ  ฟังก์ชัน จะไม่มีวงรอบของคาบที่ 2 ในช่วง และ เป็นจุดตรึงแบบ Attracting Fixed Point

3. สำหรับ  มีวงรอบเฉพาะเป็น 2 cycle  ในช่วงที่ ซึ่ง  เป็นจุดตรึงแบบ Attracting ขณะที่ เป็นจุดตรึงแบบ Repelling

4. หาก  จะได้ 

1. แผนภาพวงรอบ (The Orbit Diagram)

แผนภาพวงรอบ คือ ความพยายามที่จะหาภาพของระบบพลวัตร ณ ค่า *c* ต่าง ๆ ในรูปภาพเพียงภาพเดียว แล้วได้ผลลัพธ์นำไปสู่บทสรุปที่ดีของพลวัตร  ว่าทำอย่างไรระบบ  จึงจะเปลี่ยนแปลงไปสู่ความอลวน แผนภาพวงรอบนี้จะเป็นการพล็อตค่า *c* ในแกนนอนกับ แอสซิมโททิค ออร์บิท (Asymptotic Orbit) ของ 0 ภายใต้ฟังก์ชันของ  ในแกนตั้ง ซึ่งแอสซิมโททิค ออร์บิท ให้ความหมายว่าเราจะไม่พล็อตการคำนวณซ้ำที่ค่าน้อยๆ ที่จะทำให้วงรอบการคำนวณมีพฤติกรรมไปสู่จุดสิ้นสุดของตัวมันเองซึ่งทำให้เราเห็นภาพรวมของวงรอบการคำนวณ เพราะเราจะต้องกำจัดพฤติกรรมชั่วคราว (Transient Behavior) ของวงรอบการคำนวณ

2.2.2 ประโยชน์จากการศึกษาทฤษฎีอลวน [3]

* ใช้วิเคราะห์ระบบและทำนายอนาคตผลของระบบในระยะสั้นได้ โดยการหาค่าเริ่มต้นที่ดีใช้ในแบบจำลองที่เป็นตัวแทนของระบบ หากค่าเริ่มต้นมีความเหมาะสมใกล้เคียงสถานะของระบบจะส่งผลให้การคำนวณหาผลลัพธ์พฤติกรรมของระบบได้ถูกต้องแม่นยำ เหตุนี้ทฤษฏีอลวนมักถูกประยุกต์ใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้ไฟฟ้าสูงสุดในแต่ละวันหรือพยากรณ์สภาพอากาศ
* ใช้ในการสร้างระบบเคออส เช่น สร้างเครื่องปรับอากาศทำความร้อนที่มีการปรับอุณหภูมิเปลี่ยนไปมาอย่างเคออสรอบๆ ค่าค่าหนึ่งทำให้เป็นเหมือนธรรมชาติ ซึ่งมนุษย์จะรู้สึกสบายตัวมากกว่าเครื่องทำความร้อนที่มีการปรับอุณหภูมิแบบคงที่
* ใช้ในการควบคุม สร้างเสถียรภาพให้ระบบ อาศัยความไวต่อสถานะตั้งต้นที่หากมีการรบกวนเพียงเล็กน้อยก็จะทำให้ผลลัพธ์เปลี่ยนแปลงจำนวนมากในการสร้างหรือควบคุมระบบให้อยู่ในสถานะเสถียรหรือสภาวะที่ต้องการได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.3 ระบบเคออส (Chaos System) [3]

มีลักษณะเป็นระบบที่มีพฤติกรรมเสมือนกับว่าเป็นกระบวนการแบบสุ่ม มีความแปรปรวนและไม่แน่นอน (Random/Stochastic) แต่แท้จริงแล้วกลับแฝงความมีระเบียบอยู่เนื่องจากเหตุการณ์ในระบบเกิดขึ้นภายใต้กฎเกณฑ์ที่แน่นอน (Deterministic) สามารถเขียนแทนในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้

ในการศึกษาทฤษฎีอลวนนักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์มักนิยมศึกษาตัวควบคุมหรือตัวดึงดูด (Attractor) ซึ่งเป็นตัวเลขทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าเกือบจะคงที่ ทำหน้าที่เป็นตัวกำหนดและควบคุมพฤติกรรมพื้นฐานที่จะนำไปสู่ความซับซ้อนในระบบเคออส โดยเมื่อระบบเคออสเดินทางไปไกลจากจุดสมดุลมากที่สุดก็จะเปลี่ยนตัวเองที่ระดับพื้นฐานทำให้ตัวควบคุมเดิมต้องหยุดชะงักในทันที ฉะนั้นการศึกษาตัวควบคุมระบบจะทำให้ทราบว่าระบบดังกล่าวเป็นระบบเคออสหรือไม่

*ระบบเคออสประกอบด้วยคุณสมบัติดังนี้*

* เป็นระบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear System) ผลลัพธ์รวมทั้งหมดของระบบไม่เท่ากับผลรวมของผลลัพธ์ย่อยๆ ของระบบรวมกัน
* เป็นระบบแบบไม่สุ่ม เกิดขึ้นเหตุการณ์ภายใต้กฎเกณฑ์ที่แน่นอน
* เป็นระบบที่ไวต่อสภาวะเริ่มต้น หากระบบเริ่มต้นจากสภาวะที่ต่างกันเพียงเล็กน้อยเมื่อเริ่มระบบไปได้ซักระยะ สภาวะของระบบจะแตกต่างกันอย่างชัดเจน
* ไม่สามารถทำนายในระยะยาวได้ เนื่องจากไม่ทราบว่าปัจจัยใดที่ก่อผลกระทบให้เกิดความเปลี่ยนแปลง

*ตัวชี้วัดความเป็นเคออสโดยทั่วไปมีดังนี้*

1. ทางสองแพร่ง (Bifurcation) รูปร่างคล้ายตัว Y จะเกิดขึ้นหากความไร้ระเบียบพัฒนาตัวเองออกไปจากจุดสมดุลมากที่สุดทำให้ระบบมีความยุ่งเหยิงซับซ้อนมากที่สุด ณ จุดๆ นี้ตัวควบคุมจะเปลี่ยนสภาพไปเป็นตัวควบคุมใหม่ซึ่งจะทำหน้าที่กำหนดควบคุมปรากฏการณ์ใหม่ที่ไม่เหมือนเดิมซับซ้อนยิ่งกว่าเดิมแต่จะคงสมบัติเดิมอยู่ในระบบใหม่นั้น ยกตัวเช่น Logistic map มีตัวแปรในสมการสัมพันธ์กันดังสมการที่ 12 และภาพที่ 2.10

 (12)



ภาพที่ 2.10 แผนภาพลอจิสติกแมพและตัวดึงดูดสำหรับค่า r แบบคาบคู่

(ที่มา: http://scijournal.kku.ac.th/files/Vol\_40\_No\_1\_P\_66-74.pdf)

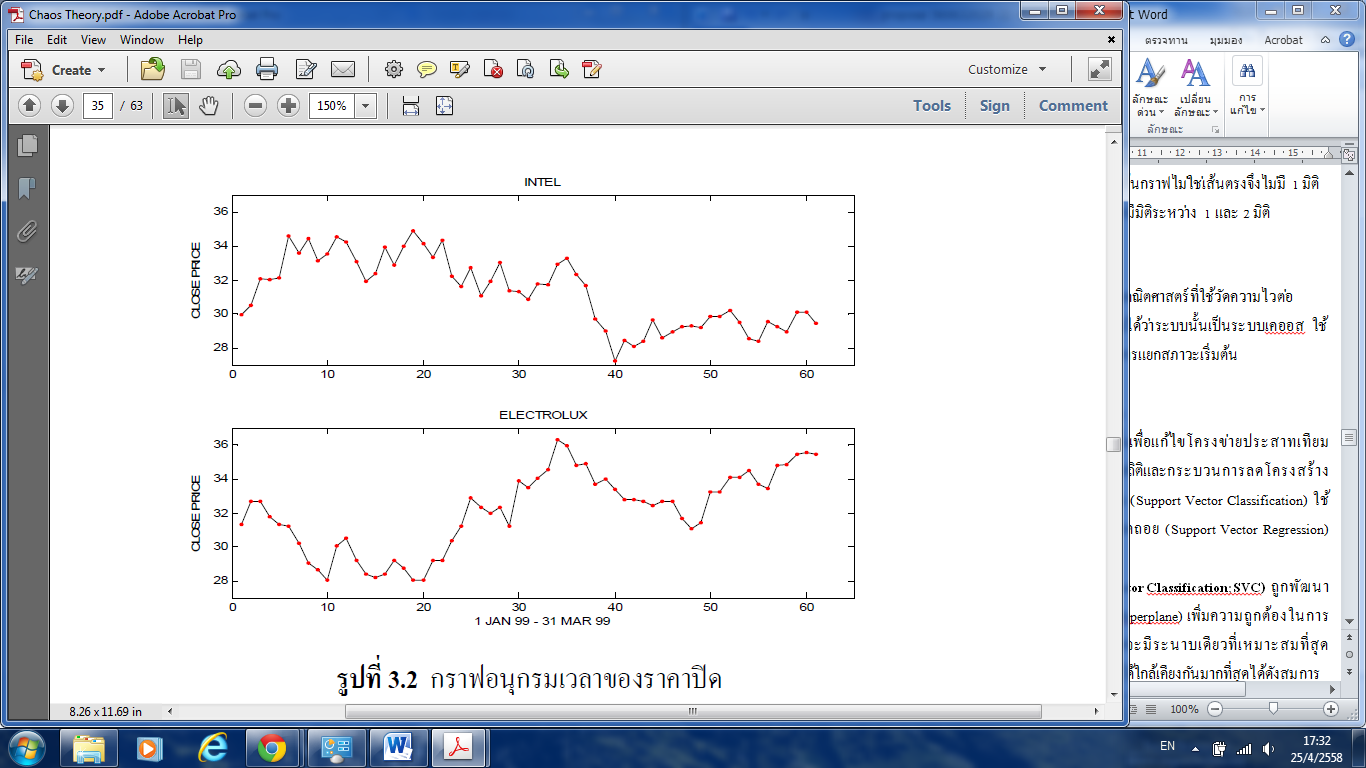
2. แฟร็กทัล (Fractal) คือ ระบบรูปร่างเรขาคณิต อาจมีกฎเกณฑ์ในการประกอบรูปร่างที่ซับซ้อนแต่มีแบบแผน จะสังเกตเห็นจากลักษณะที่เมื่อมองจากภาพรวมจะเห็นแบบแผนชนิดหนึ่งและมองเข้าไปในส่วนย่อยก็จะเห็นแบบแผนลักษณะคล้ายกัน เช่น กะหล่ำดอก (Cauliflower หรือ Broccoli) เป็นคุณสมบัติความคล้ายคลึงตัวเองและมีคุณสมบัติที่เรียกว่า Hausdorff Dimension คือไม่เป็นจำนวนเต็ม



ภาพที่ 2.11 บล็อกโคลีชนิดหนึ่ง (Romanesco broccoli) ที่มีลักษณะแฟร็กทัล

(ที่มา: http://www.burpee.com/vegetables/broccoli/)

แฟร็กทัลมีอยู่ 2 ชนิด คือ 1) Deterministic Fractal และ 2) Random Fractal [17] โดยที่ Random Fractal เกิดจากการรวมกันในลักษณะสุ่มของแฟร็กทัลที่ขนาดต่างๆ ในอนุกรมเวลา Random Fractal มีความคล้ายตนเองสัมพันธ์กับเวลา จึงสามารถนำมาพิจารณาอนุกรมเวลาของตลาดหุ้นได้จากภาพที่ 11 เส้นกราฟไม่ใช่เส้นตรงจึงไม่มี 1 มิติและไม่ใช่ 2 มิติเพราะไม่ใช่แผ่นระนาบ แสดงให้เห็นว่าอนุกรมเวลามีมิติระหว่าง 1 และ 2 มิติ



ภาพที่ 2.12 กราฟอนุกรมเวลาของราคาปิด

(ที่มา: http://scijournal.kku.ac.th/files/Vol\_40\_No\_1\_P\_66-74.pdf)

*มิติที่เป็นเศษส่วน* [17]

มิติแฟร็กทัลของอนุกรมเวลาใช้สำหรับบอกขนาดสเปซ (Space) ของอนุกรมเวลา ซึ่งก็คือจำนวนปัจจัย (Factors) ทั้งหมดที่มีผลกระทบต่อระบบแล้วทำให้เกิดอนุกรมเวลา การกำหนดค่ามิติแฟร็กทัลจึงจำเป็นต้องศึกษาความสัมพันธ์ของกลุ่มในสเปซ โดยให้สิ่งที่ต้องการ ศึกษาในสเปซมีขนาดใหญ่กว่ามิติแฟร็กทัล เรียกสเปซที่ถูกพิจารณานี้ว่า Embedding Dimension หรือ Toplogical Dimension เช่นวัตถุมีมิติอยู่ระหว่าง 2 และ 3 มิติ โดยทั่วไปเรามักสรุปว่าวัตถุมี 3 มิติ แต่มิติของแฟร็กทัลของเฟสสเปซ (Phase Space) มีความแตกต่างจากแฟร็กทัลอนุกรมเวลาตรงที่มีอยู่มิติระหว่าง 1 และ 2 มิติ เพราะพิจารณาตัวแปรเดียว แต่จะพิจารณารวมทุกตัวแปรในระบบสำหรับเฟสสเปซ สรุปคือมิติแฟร็กทัลจะบอกถึงจำนวนน้อยที่สุดของตัวแปรที่ต้องการในการสร้างแบบจำลองระบบพลวัตรโดยที่ค่ามิติแฟร็กทัลนั้นขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของระบบ

การประมาณค่ามิติแฟร็กทัลหาได้จากวิธีหามิติสหสัมพันธ์ (Correlation Dimension) โดยใช้สมการฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Correlation Function) หาความเป็นไปได้ของข้อมูลแต่ละคู่ที่มีความสัมพันธ์กันของตัวควบคุมภายในรัศมี 

*มิติสหสัมพันธ์ (Correlation Dimension)* [17]

กำหนดให้อนุกรมเวลา และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ ดังสมการที่ 13

 (13)

โดย  คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Correlation Function)

 คือ ค่าอนุกรมเวลา ณ เวลา t

 คือ ค่าอนุกรมเวลา ณ เวลา s

 คือ ฟังก์ชันตัวบ่งชี้ (Indicator Function)

 คือ ค่าๆ หนึ่งที่มีค่าน้อยมาก

สมการของอนุกรมเวลาดังสมการที่ 14

 (14)

โดย  คือ ค่าของอนุกรมเวลา ณ เวลา t

 คือ ค่า Time Delay ที่เหมาะสม

 คือ ค่า Embedding Dimension

ซึ่งฟังก์ชันตัวบ่งชี้ มีเงื่อนไขดังสมการที่ 15

 (15)

จากสมการที่ 13 จะได้สมการดังต่อไปนี้

**************(16)

*หรือสมการที่* 1*7*

 (17)

โดย  คือ มิติสหสัมพันธ์ (Correlation Dimension)

*มิติสหสัมพันธ์ของตัวดึงดูดเคออติก*

ตัวดึงดูดเคออติก (Chaotic Attractors) จะมีลักษณะเฉพาะสังเกตได้จาก ค่าแฟร็กทัลของมิติสหสัมพันธ์ว่าจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

* ค่ามิติสหสัมพันธ์ที่มีค่าสูงแสดงถึงความซับซ้อนที่เกิดขึ้นภายในระบบ
* ค่ามิติสหสัมพันธ์ที่ต่ำกว่า 4 จนถึงระดับหนึ่งจะเข้าใกล้ระบบเคออติก
* ค่ามิติสหสัมพันธ์ที่มีค่าสูงแสดงให้เห็นว่าระบบพลวัตรเข้าใกล้กระบวนการแบบสุ่ม
* ระบบสโทแคสติก (Stochastic) จะแสดงค่าประมาณมิติสหสัมพันธ์กับค่าเอมเบดดิงไดเมนชันที่เพิ่มขึ้น พิจารณาจากการใช้  โดยเพิ่มค่าเอมเบดดิงไดเมนชัน (m)
* หากค่ามิติสหสัมพันธ์ลู่เข้าสู่ค่าบางค่าหรือจนเกือบคงที่ ค่าที่ได้ใช้ในการประมาณมิติสหสัมพันธ์ที่แท้จริงของระบบดังสมการที่ 18

** (18)

* โดยทั่วไประบบดีเทอร์มินิสติค (Deterministic) กำหนดให้มีค่าค่ามิติสหสัมพันธ์สำหรับเอมเบดดิงดังสมการที่ 19

* (*19*)*

3. ไลพูนอฟ เอกซ์โปเนนท์ (Lyapunov Exponent) ตัวเลขทางคณิตศาสตร์ที่ใช้วัดความไวต่อสภาวะตั้งต้น ใช้วัดมิติของตัวควบคุมของระบบถ้าปรากฏค่าบวกจะสรุปได้ว่าระบบนั้นเป็นระบบเคออส ใช้ในการวิเคราะห์ทางโคจรของอนุภาคใน Phase Space โดยการแยกสภาวะเริ่มต้น  ดังสมการที่ 20

 (20)

โดย  คือ ไลพูนอฟ เอกซ์โปเนนท์

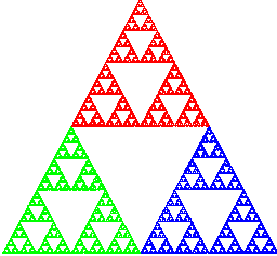
* 1. *เคออสเกมส์ (The Chaos Game)*

2.4.1 เคออสเกมส์ [20]

ตั้งแต่มีการคิดค้นระบบไดนามิกแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear Dynamic) ระบบไดนามิกเคออติก (Chaotic Dynamical System) มักจะมีคำถามว่าโครงสร้างที่แน่นอนจากโค้งที่ซับซ้อนอย่างแฟร็กทัลนั้นจะมีลักษณะเป็นอย่างไร อาจจะเป็นปัญหาที่ซับซ้อนไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งหากจะอธิบายยกตัวอย่างได้เป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. นึกถึงสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีความสมมารต แล้วกำหนดจุด 3 จุดให้เป็นมุมของสามเหลี่ยมนี้ลงบนกระดาษ กำหนดให้มุมที่จุดหนึ่งมีสีแดง มุมที่สองมีสีน้ำเงิน และมุมที่สามมีสีเขียว
2. เลือกลูกเต๋าที่ความสมมาตรมา 1 อันให้มีหน้าของลูกเต๋า 2 หน้าเป็นสีแดง อีก 2 หน้าเป็นสีน้ำเงิน และอีก 2 หน้าที่เหลือเป็นสีเขียว
3. เลือกจุดเริ่มต้น (Seed) หนึ่งจุดตรงไหนก็ได้ แต่ให้อยู่ในอาณาเขตของพื้นที่สามเหลี่ยมใน 3 จุดที่เรากำหนดไว้ ในข้อที่ 1
4. ทำการทอยลูกเต๋า หากปรากฏหน้าสีอะไรให้ทำการบันทึกจุดที่เป็นครึ่งหนึ่งของระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้นกับจุดที่เป็นมุมของสามเหลี่ยมที่มีสีเดียวกับสีที่ปรากฎจากการทอยลูกเต๋านั้น เช่น หากทอยลูกเต๋าแล้วปรากฏหน้าสีแดงให้ทำการบันทึกจุดที่เป็นระยะทางครึ่งหนึ่งระหว่างจุดเริ่มต้นกับจุดมุมสีแดง แล้วลบจุดเริ่มต้นออกไป
5. ใช้จุดที่เราได้ก่อนหน้านี้ซึ่งก็คือจุดที่เป็นครึ่งหนึ่งระหว่างระยะทางจากจุดเริ่มต้นถึงจุดที่เป็นมุมของลูกเต๋าที่ปรากฎหน้าสีเดียวกัน เป็นจุดเริ่มต้น จากนั้นก็ทำการทอยลูกเต๋า หากหน้าของลูกเต๋าปรากฎสีอะไรให้ทำการบันทึกจุดที่เป็นครึ่งนึงระหว่างระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดมุมของสามเหลี่ยมที่มีสีเดียวกับสีที่ปรากฎจากการทอยลูกเต๋า และทำแบบนี้ต่อไปเรื่อยๆ

ซึ่งหากเราลองวาดภาพจุดทั้งหมดที่ได้จากการโยนลูกเต๋าเหล่านี้จำนวนนับร้อยครั้งโดยใช้คอมพิวเตอร์แล้วจะปรากฎเป็นรูปแบบที่เราสามารถคาดเดาได้ ผู้คนจำนวนมากที่ไม่คุ้นเคยกับเกมส์นี้คาดเดาว่ารูปภาพที่ได้จากการระบายสีจุดเหล่านี้ลงในสามเหลี่ยมจะเป็นแบบสุ่มจะสะเปะสะปะ ยุ่งเหยิง คาดเดาไม่ได้ แต่พวกเขาคิดผิดเมื่อผลลัพธ์ที่ปรากฏเป็นภาพที่เกิดจากเหตุการณ์สุ่มเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งที่มีระเบียบเป็นแบบแผนที่ เรียกว่า สามเหลี่ยม Sierpinski (Sierpinski triangle)



ภาพที่ 2.13 สามเหลี่ยม Sierpinski

(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

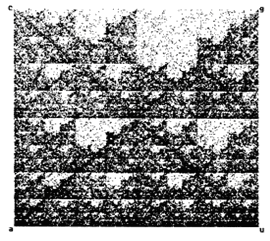
จากภาพที่ 12 สามเหลี่ยมข้างบนมีสีแดง ต่ำลงมาฝั่งซ้ายมีสีเขียว และต่ำลงมาฝั่งขวามีสีน้ำเงิน สีที่กำหนดให้นี้ใช้เพียงระบุสิ่งที่จะได้จากจุดทั้งหมดที่ได้จากการทอยลูกเต๋า โดยระบายสีจากจุดที่ได้จากแต่ละมุม หากกำหนดตัวอย่างจะเห็นได้ว่าสัดส่วนของสามเหลี่ยมที่ได้จากจุดมุมสีเขียวจะเกิดรูปสามเหลี่ยมสีเขียวเล็กๆ ที่มีลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมสีเขียวรูปใหญ่ที่มีขนาดเล็กลงไปเรื่อยๆ

ลำดับของการเกิดจุดในเคออสเกมส์นี้เรียกว่า วงรอบ ของจุดราก เกิดจากการทอยลูกเต๋าซ้ำๆ แล้วติดตามร่องรอยไปเรื่อยๆ จนเกิดผลลัพธ์เป็นวงรอบที่เรียกว่า การทำซ้ำ (Iteration) ซึ่งกระบวนการทำซ้ำเป็นที่รู้จักในวงการคณิตศาสตร์ว่าเป็น ทฤษฎีของระบบไดนามิคที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete Dynamical Systems Theory) ที่ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการการทำซ้ำ ซึ่งมีข้อสังเกตอยู่ 2 ข้อคือ

1. สามเหลี่ยม Sierpinski เป็นหนึ่งในพื้นฐานของภาพเรขาคณิตที่เรารู้จักในนามของแฟร็กทัล
2. ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นบนรูปสามเหลี่ยม Sierpinski นี้ให้ผลลัพธ์เหมือนเดิมไม่ว่าเราจะกำหนดจุดรากตำแหน่งใดก็ตามเมื่อตอนเริ่มต้นเกมส์
   * 1. Chaos Game Representation

Chaos Game Representation (CGR) ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแสดงลำดับจีโนม คิดค้นโดยเจฟฟรีย์ (H. Joel Jeffrey) ในปีคริสศักราช 1990 ทฤษฎีของเขาแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของยีนโดยใช้เคออสเกมส์แสดงลักษณะของรูปแบบบางอย่างที่จะกล่าวในย่อหน้าถัดไป

CGR ของ Human Beta Globin แสดงให้เห็นรูปแบบที่เป็นลักษณะเฉพาะ กล่าวคือพื้นที่ว่างเกือบทั้งหมดในควอดแดนท์ (Quadrant) ขวาบน หรือ G-quadrant ได้ถูกคัดลอกและปรากฎขึ้นอีกทีในขนาดที่เล็กกว่าบนพื้นที่ควอดแดนท์ทางด้านซ้าย (C-quadrant) CGR นี้แสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติความคล้ายคลึงตัวเอง ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาแฟร็กทัลและระบบไดนามิคเคออติก ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นในการหาคุณลักษณะเด่นใน Human Beta Globin ในการหาจำนวนลำดับในจีโนม



G

C

T

A

ภาพที่ 2.14 CGR of Human Beta Globin Region บน โครโมโซม 11

(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

ซึ่งได้ข้อสรุปออกมาดังนี้

1. พื้นที่ว่างในควอดแด้นท์ขวา บน สอดคล้องกับการกระจัดกระจายของดีเอ็นเอ กัวนีน (Guanine;G)

2) ทุกๆ จุดบนภาพแต่ละควอดแด้นท์เกิดจากระยะทางเครึ่งหนึ่งระหว่างจุดที่พล็อตไปยังมุมของมันเอง

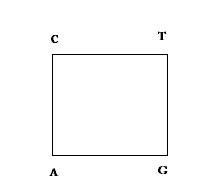
3) ภาพคัดลอกของควอดแด้นท์เป็นดีเอ็นเอที่มีสารประกอบกรดนิวคลีอิค (Nucleic Acid) ชนิดที่ T หรือ ไธมีน (ควอดแด้นท์ขวาล่าง) และ A หรือ อะดีนีน (ควอดแด้นท์ซ้ายล่าง) มีคุณสมบัติคล้ายคลึงตัวเอง

4) รูปแบบดีเอ็นเอนี้ถูกพบได้เฉพาะสัตว์ที่มีกระดูกสันหลัง

***CGR ของลำดับของนิวคลีโอไทด์ [21]***

การใช้แผนภาพ CGR ในขั้นตอนเริ่มต้น ให้ควอดแด้นท์ A อยู่ที่ตำแหน่ง (0,0) G อยู่ตำแหน่ง (1,0) T อยู่ตำแหน่ง (1,1) และ C อยู่ที่ตำแหน่ง (0,1) หรืออาจจะสลับตำแหน่งกันก็ได้ แต่ไม่ให้ตำแหน่ง AT และ GC มีอาณาเขตเชื่อมโยงกัน หรือให้อยู่ในตำแหน่งแนวทะแยงมุมกัน

บนแผนภาพ CGR มีนิวคลีโอไทด์ อยู่ 4 ชนิด คือ A, G, C และ T ถูกกำหนดที่แต่ละมุมของสี่เหลี่ยม



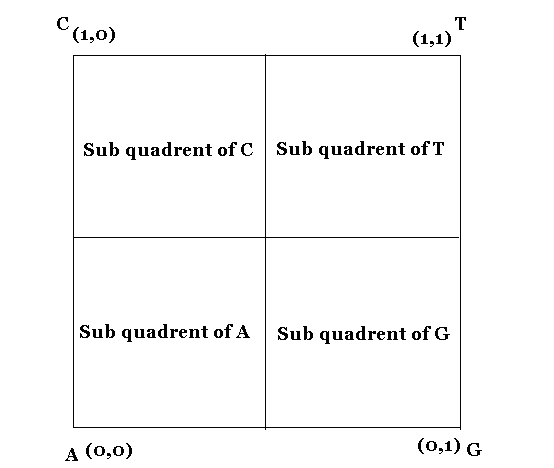
ภาพที่ 2.15 CGR ที่กำหนดนิวคลีโอไทด์ไว้บนแต่ละมุม

(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

ทุกๆ นิวคลีโอไทด์จะถูกแสดงแทนด้วยจุด ๆ หนึ่งบนรูปสี่เหลี่ยมนี้ ซึ่งจุดแรกเป็นจุดที่มีระยะทางครึ่งนึงระหว่างศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมและมุมที่สอดคล้องกับลำดับนิวคลีโอไทด์ตัวแรก และจุดถัดมาเป็นจุดที่มีระยะทางครึ่งหนึ่งระหว่างจุดก่อนหน้ากับมุมที่สอดคล้องกับนิวคลีโอไทด์ตัวถัดไป

ลักษณะเด่นใน CGR ประกอบด้วย

1. ทุกๆ รูปแบบที่เห็นใน CGR สอดคล้องกับบางรูปแบบที่อยู่ในลำดับฐาน
2. จุดที่ Kth ถูกวาดบน CGR ตามลำดับตั้งแต่จุดเริ่มต้นที่ลำดับย่อย K ตัวแรก
3. สี่เหลี่ยม CGR ถูกแบ่งเป็น 4 ส่วนและแต่ละส่วนแสดงถึงแต่ละส่วนของนิวคลีโอไทด์ ซึ่งมีรูปร่างดังแสดงในภาพต่อไปนี้



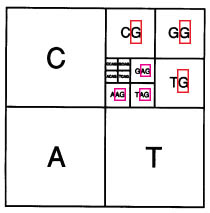
ภาพที่ 2.16 CGR ที่กำหนดนิวคลีโอไทด์ไว้บนแต่ละมุม

(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

จากแผนภาพข้างต้น ทำให้ทราบว่า

* สี่เหลี่ยมย่อยด้านซ้ายล่างสำหรับนิวคลีโอไทด์ชนิดที่ A ทุกๆ จุดที่มาอยู่ในอาณาเขตนี้แสดงให้เห็นว่าลำดับของดีเอ็นเอจะจบที่ A
* สี่เหลี่ยมย่อยด้านล่างขวาเป็นพื้นที่สำหรับนิวคลีโอไทด์ชนิดที่ G ดังนั้นจุดทั้งหมดที่มาตกอยู่ในพื้นที่นี้ลำดับของดีเอ็นเอจะจบที่ G
* สี่เหลี่ยมย่อยด้านขวาบนเป็นพื้นที่สำหรับนิวคลีโอไทด์ชนิดที่ T ดังนั้นจุดทั้งหมดที่มาตกอยู่ในพื้นที่นี้ลำดับของดีเอ็นเอจะจบที่ T
* สี่เหลี่ยมย่อยด้านซ้ายบนเป็นพื้นที่สำหรับนิวคลีโอไทด์ชนิดที่ C ดังนั้นจุดทั้งหมดที่มาตกอยู่ในพื้นที่นี้ลำดับของดีเอ็นเอจะจบที่ C
* จุด (0,0) สำหรับนิวคลีโอไทด์ที่มีลำดับ ‘A’ คล้ายกับจุด (0,1) สำหรับลำดับ ‘G’ และจุด  (1, 0) สำหรับ ‘C’ และจุด (1, 1) สำหรับลำดับ ‘T’

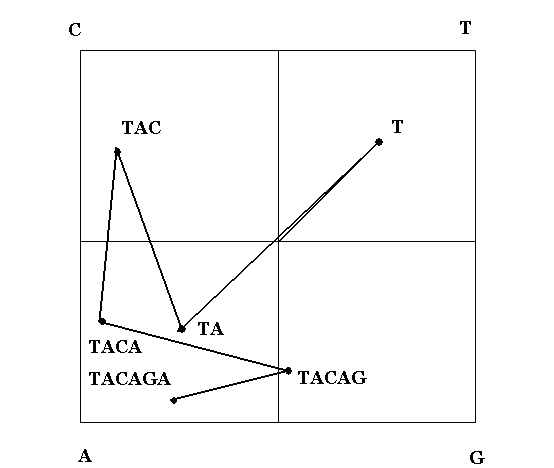
1. แต่ละฐานจะมีจุดในแต่ละควอดแด้นท์ที่ถูกติดป้ายด้วยฐานของมันด้วยควอดแด้นท์ย่อยและควอดแด้นท์ที่ย่อยๆ ลงไปอีก
2. ถ้าจุดสองจุดอยู่ในควอดแด้นท์เดียวกัน จะสอดคล้องกับลำดับที่ตามมาในฐานเดียวกัน ถ้าจุดทั้งสองอยู่ในควอดแด้นท์ย่อยเดียวกัน ลำดับที่ตามมาจะมีฐานสองอันสุดท้ายคล้ายกัน และถ้าจุดทั้งสองอยู่ในควอดแด้นท์ย่อยของควอดแด้นท์ย่อยเดียวกัน จะมีฐาน 3 อันสุดท้ายเหมือนกันดังแสดงในภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2.17 ความเหมือนระหว่างโอลิโกนิวคลีโอไทด์และพื้นที่ของ CGR ในลำดับดีเอ็นเอ

(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

1. จำนวนความต่างของ n-mers แสดงให้เห็นถึงลำดับที่สามารถแบ่งออกไปได้อีกของพื้นที่สี่เหลี่ยม CGR ไปยังสี่เหลี่ยมย่อยลำดับที่ 2-n ซึ่ง 1-mer แทนโอลิโกนิวคลีโอไทด์เพียง 1 ฐาน 2-mer แทนโอลิโกนิวคลีโอไทด์ 2 ฐานซึ่งมีแนวคิดเดียวกับการเรียกซ้ำ (Recursive) ที่แต่ละควอดแด้นท์สามารถถูกแบ่งควอดแด้นท์ออกไปได้อีก
2. จะเห็นว่าไม่มีลำดับของดีเอ็นเอที่มีความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางของรูปสี่เหลี่ยม ดังนั้นจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมแสดงให้เห็นถึงลำดับของดีเอ็นเอที่ไม่มีอยู่ (Null)
3. ฐานที่อยู่ติดกันในแต่ละลำดับจะไม่ถูกวาดอยู่ใกล้กัน การที่มีจุดอยู่ใกล้กันบนแผนภาพ CGR ไม่ได้แสดงว่าดีเอ็นเอมีลำดับใกล้กัน
4. เราจะติดตามเส้นทางของแต่ละจุดที่ถูกวาดโดยตีความจากนิวคลีโอไทด์แต่ละลำดับโดยลาดเส้นเชื่อมจากจุดสุดท้ายไปยังจุดศูนย์กลางซึ่งแต่ละเส้นทางจะมีลักษณะไม่ซ้ำกันเลยสำหรับแต่ละลำดับดีเอ็นเอ แต่ความยาวของเส้นทางสามารถระบุความยาวของลำดับนิวคลีโอไทด์แต่ละตัวได้ ยกตัวอย่างเช่นภาพดังต่อไปนี้แสดงให้เห็นเส้นทางของลำดับ ‘TACAGA’



ภาพที่ 2.18 การวาดภาพลำดับนิวคลีโอไทด์ ‘TACAGA’ บน CGR

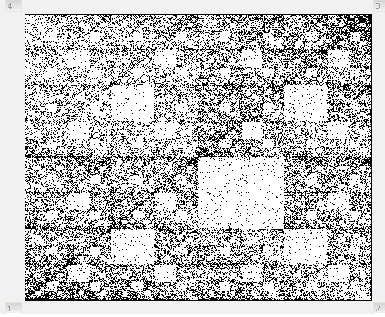
(ที่มา: http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation)

1. จุดบน CGR สามารถสร้างระบบฟังก์ชันทวิภาควนซ้ำ (Iterated Function System) ถูกจำกัดความโดยสมการ

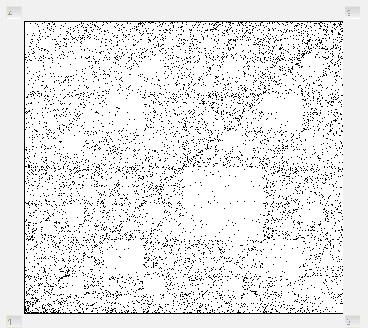


ที่ซึ่ง ***gix*** และ ***giy*** มีจุดที่แกน ***X*** และ ***Y*** มีลำดับนิวคลีโอไทด์ร่วมกัน ณ ตำแหน่งลำดับที่ ***i***

1. แผนภาพ CGR มีลักษณะธรรมชาติเป็นแฟร็กทัล แฟร็กทัลที่มีรูปทรงทางเรขาคณิตที่ไม่เป็นระเบียบและยุ่งเหยิง แต่มีรายละเอียดโครงสร้างที่มีความคล้ายตนเองโดยไม่มีจุดสิ้นสุด ซึ่งโครงสร้างคล้ายตนเองจะเกิดขึ้นทุกๆ ระดับที่ขยายภาพเข้าไป แผนภาพของจีโนมสิ่งมีชีวิตทั้งหมดและจีโนม 10,000 แบบมีรูปแบบเดียวกันบนแผนภาพ CGR มีประโยชน์มากในการระบุส่วนประกอบของดีเอ็นเอ และรูปแบบของแฟร็กทัลของคอลลาเจนในมนุษย์ (Human Collagen) มีรูปแบบลำดับเดียวกันดังแผนภาพต่อไปนี้ที่แสดงผลที่ได้จากการค้นพบเคออสเกมส์ และผลที่ได้จากแฟร็กทัลบนแผนภาพ CGR



ภาพที่ 2.19 CGR ของลำดับทั้งหมดใน Human Collagen



ภาพที่ 2.20 CGR ของแฟร็กทัลใน Human Collagen

ในรูปภาพที่ 2.19 และ 2.20 นี้ทั้งสองรูปมีรูปแบบเดียวกัน และสิ่งเดียวที่แตกต่างกันคือความหนาแน่นของจุด รูปภาพที่ 18 นั้นมีความหนาแน่นกว่าเพราะแสดงให้เห็นถึงลำดับทั้งหมดในขณะที่ภาพที่ 19 ความหนาแน่นน้อยกว่าเพราะใช้เพียงส่วนหนึ่งของลำดับที่มีความเหมือนกัน นี่เป็นจุดเด่นของแผนภาพ CGR เนื่องจากมีลักษณะทางกายภาพเป็นแฟร็กทัลจึงสามารถใช้เป็นเสมือนลายเซ็นต์ของจีโนมได้

*เคออสเซนทรอยด์ (ChaosCentroid)[21]*

เป็นลักษณะของการสกัดข้อมูลในเคออสเกมส์รีพรีเซ้นเทชัน (Chaos Game Representation; CGR) ที่เปลี่ยนลำดับของข้อมูลหนึ่งมิติยาวๆ ของจีโนม (Genomes) ในดีเอ็นเอให้กลายเป็นรูปแบบกราฟิคหรือแผนภาพ จีโนมในดีเอ็นเอจะถูกสกัดคุณลักษณะของข้อมูล (Features Extraction) โดยใช้เคออสเซนทรอยด์ (ChaosCentroid) หาโครงสร้างของลำดับข้อมูลในเทอมของเซนทรอยด์ในแต่ละพื้นที่ย่อย (Sub-Region) ด้วยการหาระยะทางแบบยุคลิด (Euclidean Distances) ซึ่งมีขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

อันเนื่องมาจากลำดับจุดที่ kth ที่วาดบนภาพ CGR แต่ละลำดับนั้นมีความสมนัยกับความยาวของ k ตัวแรกที่เป็นจุดแรกเริ่มของลำดับย่อยในแต่ละลำดับ ดังนั้นทุกรูปแบบที่มองเห็นบนแผนภาพ CGR นั้นจะมีความสมนัยกับบางรูปแบบของลำดับนิวคลีโอไทด์ แผนภาพ CGR แสดงให้เห็นถึงข้อมูลส่วนกลางของลำดับนิวคลีโอไทด์ การแบ่งส่วนแผนภาพ CGR เป็นพื้นที่ย่อย หรือซับรีเจียน(Sub-Regions) นั้นทำให้เข้าถึงข้อมูลเฉพาะที่ เช่น ถ้าจุด 2 จุดอยู่ในควอดแด้นท์เดียวกัน ทั้งสองจุดนั้นจะมีความสมนัยกับนิวคลีโอไทด์ลำดับสุดท้ายซึ่งเรียกว่า โมโนนิวคลีโอไทด์ (Mononucleotide) และถ้าอยู่ในควอดแด้นท์ย่อยเดียวกันจะมีลำดับนิวคลีโอไทด์สุดท้ายที่เหมือนกันเรียกว่า ไดนิวคลีโอไทด์ (Dinucleotides) ไปเรื่อยๆ ซึ่งสิ่งนี้แสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของลำดับตามจำนวนจุด เคออสเซ็นทรอยด์ถูกนำไปใช้ประโยชน์ในการแสดงนัยสำคัญทางชีวภาพโดยคำนวณจุดศูนย์กลางของการกระจายในแต่ละจุดในแต่ละซับรีเจียน ดังนั้นจุดศูนย์กลางจึงสามารถแปลงเป็นโครงสร้างที่มีลำดับเฉพาะที่ถูกแสดงในรูปของข้อมูลเฉพาะที่ในแต่ละซับรีเจียน สำหรับเซ็นทรอยด์แผนภาพ CGR จะถูกแบ่งเป็น  ซึ่งเป็นขนาดของซับรีเจียน ที่ซึ่ง  ซึ่งเป็นช่วงที่ประกอบไปด้วยตัวเลขทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้จากแผนภาพ CGR อาทิเช่นแผนภาพ CGR จะไม่ถูกแบ่งเมื่อ  และแผนภาพ CGR จะถูกแบ่งเท่ากับ 4 ซับรีเจียนเมื่อ  ถ้าค่า  ของ มากกว่า 11 บางซับรีเจียนจะไม่คลอบคลุมทุกจุด ค่า  จึงมีค่ามากกว่า 11 ไม่ได้ สำหรับแต่ละ  ที่ถูกแบ่งจากแผนภาพ CGR จุดศูนย์กลาง (Centroid) ของแต่ละซับรีเจียนจะถูกคำนวณเป็นอันดับแรก จากนั้นทุกคู่ที่มีระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางและจุดบนแผนภาพ CGR จะถูกคำนวณและจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ ซึ่งชุดข้อมูลของระยะทางสามารถพิจารณาได้ถึงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ฝังอยู่ในทุกซับรีเจียน อย่างไรก็ตามจำนวนของเคออสเซ็นทรอยด์สามารถมีขนาดใหญ่มากก็เป็นได้นั่นทำให้ต้องนำวิธี Singular Value Decomposition (SVD) มาใช้ลดรูปเมทริกซ์ สุดท้ายแล้วจะใช้ค่าที่อยู่ในแนวทะแยงหรือที่ได้จาก SVD ซึ่งก็คือค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) นี้มาเป็นตัวแทนของคุณลักษณะของแผนภาพ CGR

ขั้นตอนวิธีการสกัดคุณลักษณะโดยใช้เคออสเซนทรอยด์

1). กำหนดแผนภาพ CGR ที่มีขนาดเท่ากับ 

2). แบ่งส่วน CGR ออกเป็นขนาด  ที่มีขนาดเท่ากับพื้นที่ย่อย ซึ่งแต่ละพื้นที่ย่อยมีขนาดเท่ากับ

3). ให้  อาณาเขตของ CGR ที่แถวที่  และหลักที่ 

4). ให้  เป็นจำนวนจุดในพื้นที่ใน 

5). ในแต่ละพื้นที่  ให้ทำ For-loop

6). คำนวณจุดศูนย์กลาง (Centroid) โดยใช้สมการ 

7). จบการทำ For-loop

8). คำนวณเมทริกซ์ระยะทาง (Distance Matrix) โดยใช้สมการ

 ;

9). ให้เมทริกซ์  เป็นเมทริกซ์แนวทแยงของเมทริกซ์ *D* ที่คำนวณโดยวิธีการแยกตัวประกอบ Singular Value Decomposition.

10). สร้างเวกเตอร์  เป็นเวกเตอร์คุณลักษณะของ CGR

2.5 ฟัซซีซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชัน (Fuzzy Support Vector Regression;FSVR) [22]

ซัพพอร์ตเวกเตอร์แมชชีน เป็นโครงข่ายประสาทเทียมที่สร้างขึ้นเพื่อแก้ไขโครงข่ายประสาทเทียมแบบดั้งเดิม (Artificial Neural Network) อาศัยการเรียนรู้จากทฤษฏีทางสถิติและกระบวนการลด โครงสร้างต่ำสุด ที่นิยมนำไปใช้งาน คือ ซัพพอร์ตเวกเตอร์แมชชีนแบบแบ่งกลุ่ม (Support Vector Classification) ใช้ในงานเกี่ยวกับการจดจำรูปแบบ และซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชัน (Support Vector Regression) ใช้ในงานด้านการประมาณฟังก์ชัน

*2.5.1 ซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชัน (Support Vector Regression;SVR)*[23]

*ซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันมีหลักการคล้ายกับซัพพอร์ตเวกเตอร์แมชชีนแบบแบ่งกลุ่มคือใช้หาระนาบเกินที่เหมาะสมที่สุด* (Optimal Hyperplane) *แตกต่างกันที่ซัพพอร์ตเวกเตอร์แมชชีนแบบแบ่งกลุ่มจะสนใจเพียงค่าบวกและลบที่เกิดขึ้นจากการแบ่งกลุ่มข้อมูล แต่ซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันจะสนใจค่าจริงที่เกิดขึ้นจากการประมาณค่าฟังก์ชัน*

*ซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันมีอยู่ 2 ประเภท คือ แบบเชิงเส้น* (Linear Regression) *และแบบไม่เป็นเชิงเส้น* (Nonlinear Regression) *ซึ่งซัพพอร์ตเวกเตอร์แมชชีนแบบไม่เป็นเชิงเส้นจะมีขั้นตอนแตกต่างจากแบบเชิงเส้นคือจะมีการแมปข้อมูลให้อยู่ปริภูมิที่สูงกว่าเพื่อให้ได้ข้อมูลที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้น ซึ่งขั้นตอนของซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชัน แสดงได้ดังภาพที่* 2.21

Calculate Kernel Matrix



Quadratic Optimization

Calculate weight vector w



Calculate offset b using

Karush-Kuhn-Tucker conditions

Function Approximation



ภาพที่ 2.21 ขั้นตอนของซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชัน

1. ฟัซซีซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันแบบเชิงเส้น (Linear Regression) [11,14]

การหาฟังก์ชันประมาณค่า  ที่จะนำมาใช้แทนกลุ่มของข้อมูลที่ใช้ฝึกสอน เริ่มจากการสอนระบบด้วยเซตข้อมูล โดย คือ เวกเตอร์ของข้อมูลเข้า,  คือ ข้อมูลเอาต์พุต ,  คือ ค่าความเป็นสมาชิกของ  แต่ละตัวโดย  ซึ่ง และ  คือ จำนวนระเบียนของข้อมูล ผลจากการฝึกสอนจะได้ฟังก์ชันประมาณค่าดังสมการที่ 21

 (21)

โดย  คือ เวกเตอร์น้ำหนัก

 คือ ค่าไบอัส (Bias)

ซึ่งการหาระนาบเกินที่เหมาะสมเป็นการหาซัพพอร์ตเวกเตอร์ที่สามารถรักษาระยะห่างมากที่สุดระหว่างข้อมูลทั้งสองกลุ่ม ซัพพอร์ตเวกเตอร์ที่ได้จะใช้เป็นฟังก์ชันประมาณค่าของกลุ่มข้อมูลทั้งหมด การหานอร์ม (Norm) ที่น้อยสุดของ  จะทำให้ได้ค่า  ที่เหมาะสมที่สุดโดยใช้เงื่อนไขตามดังสมการต่อไปนี้

 (22)

 (23)

การสร้างระนาบเกินที่จะสามารถประมาณค่าได้อย่างแม่นยำนั้น สามารถกำหนดความแม่นยำได้จากการกำหนดความกว้างของระนาบที่เหมาะสมโดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (Error Insensitive) ในรูปฟังก์ชันการสูญเสีย (Loss Function) จากฟังก์ชันการสูญเสียแบบ  ดังสมการที่ 24

 (24)

ในฟังก์ชันการสูญเสียแบบ  มีการพิจารณาตัวแปรช่วย (Slack) เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่อยู่นอกระนาบทั้งสอง ได้สมการใหม่ดังสมการที่ 25 และ 26

 (25)

 (26)

โดย  คือ ค่าคงที่สำหรับคลุมค่าคลาดเคลื่อน

(Regularization Parameter)

 คือ ค่าคลาดเคลื่อนของข้อมูลจากขอบระนาบบน

 คือ ค่าคลาดเคลื่อนของข้อมูลจากขอบระนาบล่าง

จากสมการที่ 25 จะสามารถหาคำตอบได้ด้วยเงื่อนไขของสมการที่ 16 โดยใช้ฟังก์ชันลา กรานจ์ (Lagrange Function) ได้สมการจากการเพิ่มตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multipliers) ดังนี้



 (27)

โดย  คือ Lagrangian

 คือ ตัวคูณลากรานจ์ ซึ่ง 





ภาพที่ 2.22 การหาระนาบเกินที่เหมาะสมที่สุด

จากสมการที่ 27 แก้สมการด้วยวิธีกำลังสอง (Quadratic Programming) โดยหาอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives) เทียบกับตัวแปรที่ต้องการทราบค่าโดยให้เท่ากับศูนย์ ได้คำตอบดังสมการที่ 28

 (28)

จากสมการที่ 28 เมื่อนำไปแทนในฟังก์ชันลากรานจ์จะดังได้สมการที่ 29

 (29)

ซึ่งการหาคำตอบของสมการที่ 29 ต้องทำภายใต้เงื่อนไข





หรือ  ,

จากสมการที่ 28 หาก  จะได้สมการระนาบเกินอันใหม่เป็น

 (30)

1. ฟัซซีซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Regression) [11,14]

หากข้อมูลที่นำมาสอนมีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น ต้องใช้ฟังก์ชันเคอร์เนล (Kernel Function) ส่งผ่านข้อมูลที่ไม่เป็นเชิงเส้นไปยังปริภูมิหรือมิติที่สูงขึ้นเพื่อทำให้ข้อมูลมีลักษณะเป็นเชิงเส้น แล้วก็จึงทำตามขั้นตอนของซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันแบบเชิงเส้นดังที่กล่าวมา โดยฟังก์ชันเคอร์เนลที่ใช้จะมีรูปแบบตามสมการที่ 31

 (31)

โดย  คือ เวกเตอร์ข้อมูลเข้า

 คือ ซัพพอร์ตเวกเตอร์

 คือ ฟังก์ชันการส่งผ่านข้อมูล





ภาพที่ 2.23 การส่งผ่านข้อมูลจากปริภูมิข้อมูลเข้าที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ไปยังปริภูมิลักษณะเด่นที่เป็นข้อมูลเชิงเส้น

การส่งผ่านข้อมูลด้วยฟังก์ชันเคอร์เนล จะหาค่าน้ำหนักได้สมการใหม่ดังสมการที่ 32

 (32)

หากนำ  จากสมการที่ 32 แทนค่าลงในสมการระนาบเกินที่เหมาะสมที่สุดจะได้สมการ ใหม่ดังสมการที่ 33

 (33)

ซึ่งการหาคำตอบของสมการที่ 33 ต้องทำภายใต้เงื่อนไข

 ,

ใช้หลักการของ Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ในการปรับค่าที่อยู่ระหว่างขอบระนาบบนและขอบระนาบล่างให้เหมาะสมเพื่อหาค่าไบอัส  ที่เหมาะสม ดังสมการที่ 34

 (34)

โดย  คือ ซัพพอร์ตเวกเตอร์ที่อยู่ระนาบบน

 คือ ซัพพอร์ตเวกเตอร์ที่อยู่ระนาบล่าง

เคอร์เนลที่ใช้คือเรเดียลเบซิคฟังก์ชัน (Radial Basis Function;RBF) ดังสมการที่ 35

 (35)

ซึ่งภาพรวมของสถาปัตยกรรมซัพพอร์ตเวกเตอร์รีเกรสชันแสดงได้ดังรูปภาพที่ 2.24













**.**

**.**

**.**

**.**

**.**

**.**

x

K(x,x1)

K(x,x2)

K(x,xp)







ภาพที่ 2.24 สถาปัตยกรรมซัพพอร์ต์เวกเตอร์รีเกรสชัน

2.5.2 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function) [14]

ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกกำหนดระดับสมาชิกความเป็นสมาชิกของตัวแปรที่จะใช้งาน [24] บ่งบอกถึงระดับ (Degree) ของแต่ละสมาชิกในฟัซซีเซตว่าแทนกันได้ในระดับใด ซึ่งค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตในเอกภพสัมพัทธ์ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function) มีค่าอยู่ในช่วงปิด [0,1]

[14] ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่มีเวลามาเกี่ยวข้อง หรือขึ้นอยู่กับเวลาสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังสมการที่ 36

 (36)

โดยที่  คือ ณ เวลาที่  ของระบบ ซึ่ง 

เวลาที่เข้ามาในระบบอยู่ในช่วง  ซึ่งกำหนดให้ข้อมูลที่  มีความสำคัญมาก ที่สุด นั่นคือ  และให้ มีความสำคัญน้อยที่สุดจะได้  โดยที่  เป็นค่าขอบเขตล่างของฟังก์ชันความเป็นสมาชิก ซึ่งฟังก์ชันเชิงเส้นของความเป็นสมาชิกแบบฟัซซีสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังสมการที่ 37

 (37)

และฟังก์ชันกำลังสองของความเป็นสมาชิกแบบฟัซซีสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังสมการที่ 38

 (38)

ในการเลือกใช้ฟังก์ชันของความเป็นสมาชิกจะเลือกตามความเหมาะสมและมีคุณสมบัติครอบคลุมถึงข้อมูลที่จะรับเข้ามา สามารถทับซ้อนกันได้ตามความเหมาะสมมีได้หลายค่า และฟังก์ชันสมาชิกที่ดีสามารถเปลี่ยนแปลงแก้ไขให้เข้ากับลักษณะของงานได้